Matrizenrechnung

Prof. Dr.-Ing. Hans Fröhlich

Vorbemerkung:

Die nachstehende Zusammenstellung zur Matrizenrechnung ist so weit gesteckt wie sie für das Verständnis meiner Lehrveranstaltungen zur Ausgleichungsrechnung in den Studiengängen Vermessungswesen und Geoinformatik an der Fachhochschule Bochum benötigt wird.

Sankt Augustin, im Winter 2005

Inhaltsverzeichnis

Seite

1. Einführung [1)]

Die Lehre von den Matrizen [2)] ist eine Lehre von den linearen Beziehungen. Eine solche Beziehung zwischen den Größen x_1, x_2, ... , x_n und einem zweiten System y_1, y_2, ... , y_n hat die allgemeine Form:

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = y_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = y_n \end{matrix} \tag{1 – 1}$$

Sie ist festgelegt durch das Schema ihrer Koeffizienten a_{ij}, die als gegebene Zahlen anzusehen sind, und das – nach Zeilen i und Spalten j – geordnete Schema der Koeffizienten a_{ij} wird eine Matrix, die Matrix der linearen Beziehungen (1 – 1) genannt. Es erweist sich nun als sinnvoll und zweckmäßig, das Koeffizientenschema, die Matrix als eine selbständige mathematische Größe zusammengesetzter Art aufzufassen und durch ein geeignetes Symbol, einen Buchstaben zu bezeichnen, wozu man durchweg große Fettbuchstaben verwendet, manchmal auch unterstrichene Großbuchstaben:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{A} = \underline{A} = (a_{ij}) \tag{1 – 2}$$

Außer dem Zahlenwert des Koeffizienten a_{ij} ist seine durch den Doppelindex i, j festgelegte Stellung im Schema wesentlich, wobei der erste Index stets die Zeile, der zweite die Spalte kennzeichnet. Die Größen a_{ij} heißen die Elemente der Matrix. Ist die Anzahl n ihrer Zeilen gleich der Anzahl m ihrer Spalten, so heißt die Matrix quadratisch, und zwar von der Ordnung n.

Auch die der linearen Verknüpfung (1 – 1) unterworfenen Größen x_i, y_i fasst man zu je einem Größensystem, einem so genannten Vektor **x** bzw. **y** zusammen, die sich als einreihige Matrizen auffassen lassen. Dabei hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die Komponenten x_i, y_i dieser Vektoren in Form von Spalten anzuordnen:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{1 – 3}$$

[1)] Literatur:
Zurmühl, R.: Matrizen, Berlin 1958

[2)] Matrix: geordnetes Schema von Werten, für das bestimmte Rechenregeln gelten.

Man spricht dann bei (1 – 1) von der linearen Transformation des Vektors **x** in den Vektor **y** und schreibt kurz:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \qquad (1-4)$$

2. Matrizen-Arten

– **Quadratische Matrix**

Die Matrix **A** hat genau so viele Zeilen n wie Spalten m, $n = m$.

Spur einer Matrix:

$$Spur\,\mathbf{A} = sp\,\mathbf{A} = tr\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ ,\qquad tr \text{ (engl.: trace)}$$

– **Diagonalmatrix**

Gilt für eine quadratische Matrix $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$, spricht man von einer Diagonalmatrix.

– **Einheitsmatrix**

Sind die Elemente a_{ii} einer Diagonalmatrix alle gleich eins, spricht man von einer Einheitsmatrix oder Identitätsmatrix **I**.

Beispiel: $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

– **Transponierte Matrix**

Eine transponierte Matrix erhält man durch Vertauschen der Indizes:

$$\mathbf{A}^T = (a_{ij})^T = (a_{ji})$$

Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 7 \\ 8 & 2 & 9 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

– **Symmetrische Matrix**

Eine quadratische Matrix **A** ist symmetrisch, wenn gilt $(a_{ij}) = (a_{ji})$.

– **Dreiecksmatrix**

Eine quadratische Matrix, in der alle Elemente unterhalb bzw. oberhalb der Hauptdiagonalen gleich null sind.

- **Idempotente Matrix**

  Eine quadratische Matrix **A** heißt idempotent (idem: lateinisch, derselbe bzw. dasselbe), wenn sie die Bedingung erfüllt:

  $$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

  Beispiele: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

  $$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{X} \cdot \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T$$

- **Orthogonale Matrix**

  Eine quadratische Matrix **A** heißt orthogonal, wenn sie die Bedingung erfüllt:

  $$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

  Beispiel: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

  Anmerkung: Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist ihre Transponierte:

  $$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

3. Operationen mit Matrizen

– **Addition und Subtraktion von Matrizen**

Voraussetzung: Matrizen haben gleiche Dimension.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij})$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

– **Multiplikation einer Matrix mit einem skalaren Faktor**

$$c \cdot \mathbf{A} = (c \cdot a_{ij})$$

$$c \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = c \cdot \mathbf{A} + c \cdot \mathbf{B}$$

$$(c + d) \cdot \mathbf{A} = c \cdot \mathbf{A} + d \cdot \mathbf{A}$$

– **Matrizenmultiplikation**

Voraussetzung: Verkettbarkeit, d.h. Spaltenanzahl von **A** $\hat{=}$ Zeilenanzahl von **B**.

Multiplikation von Matrizen mit dem Schema von Falk:

Beispiele:

a)

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Falk-Schema:

$$\begin{array}{llll|ll l}
 & & & & 1 & \boxed{0} & \\
 & & & & 2 & \boxed{3} & \mathbf{B} \\
 & & & & 4 & \boxed{1} & \\
\hline
\mathbf{A} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & 15 & \boxed{11} & \\
 & 2 & 4 & 1 & 14 & 13 & \\
 & & & & & \mathbf{C} &
\end{array}$$

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$$

C hat so viele Zeilen wie **A** und so viele Spalten wie **B**.

b)

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & a_1 & b_1 & \\
 & & a_2 & b_2 & \mathbf{A} \\
 & & a_3 & b_3 & \\
\hline
 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 & \underbrace{a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3}_{[aa]} & \underbrace{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}_{[ab]} & \\
\mathbf{A}^T & & & & \\
 & b_1 \quad b_2 \quad b_3 & b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3 & \underbrace{b_1 \cdot b_1 + b_2 \cdot b_2 + b_3 \cdot b_3}_{[bb]} & \\
 & & & \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} &
\end{array}
$$

[ ]   Gauß´sches Summensymbol

Ferner:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \ldots)^T = \ldots \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(k \cdot \mathbf{A})^T = k \cdot \mathbf{A}^T$$

$$sp\,(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = sp\,(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$$

4. Determinante einer quadratischen Matrix

Permutationen

Betrachtet man die $3! = 6$ Permutationen der Ziffern 1, 2 und 3, so erhält man:

$$1\,2\,3 \qquad 1\,3\,2 \qquad 2\,1\,3 \qquad 2\,3\,1 \qquad 3\,1\,2 \qquad 3\,2\,1 \tag{4 – 1}$$

Betrachtet man ferner acht der $4! = 24$ Permutationen der Ziffern 1, 2, 3 und 4, so sind dies z.B.:

$$\begin{matrix} 1\,2\,3\,4 & 2\,1\,3\,4 & 3\,1\,2\,4 & 4\,1\,2\,3 \\ 1\,3\,2\,4 & 2\,3\,1\,4 & 3\,2\,1\,4 & 4\,2\,1\,3 \end{matrix} \tag{4 – 2}$$

Wenn in einer Permutation eine größere Ziffer einer kleineren vorangeht, so spricht man von einer Inversion. Man spricht von einer **geraden** bzw. **ungeraden** Permutation, wenn in einer gegebenen Permutation die Anzahl der Inversionen gerade bzw. ungerade ist.

Beispiele:

$1\,2\,3$ ist eine gerade Permutation, da keine Inversion vorliegt.
$1\,3\,2$ ist eine ungerade Permutation ($1\underbrace{3\,2}$), da eine Inversion vorliegt.
$4\,2\,1\,3$ ist eine gerade Permutation, denn:
$\underbrace{4\,2}\,1\,3 \;\rightarrow\; 2\,\underbrace{4\,1}\,3 \;\rightarrow\; 2\,1\,\underbrace{4\,3} \;\rightarrow\; \underbrace{2\,1}\,3\,4 \;\rightarrow\; 1\,2\,3\,4$

Determinante einer quadratischen Matrix

Gegeben seien die $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{4 – 3}$$

und das Produkt

$$a_{1\,j_1} \cdot a_{2\,j_2} \cdot a_{3\,j_3} \cdot \ldots \cdot a_{n\,j_n} \tag{4 – 4}$$

aus n Elementen von $\mathbf{A}$, und zwar so, dass aus jeder Zeile und jeder Spalte nur ein Element genommen wird. Das heißt für (4 – 4), dass der erste Index die Zeilennummer in ihrer natürlichen Anordnung bedeutet und der zweite Index j_1, j_2, ... , j_n irgendeine der $n!$ Permutationen von 1, 2, ... , n darstellt. Man definiert nun:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j_1\,j_2\cdots j_n} &= +1 \quad \text{für eine gerade Permutation} \\ \varepsilon_{j_1\,j_2\cdots j_n} &= -1 \quad \text{für eine ungerade Permutation} \end{aligned} \tag{4 – 5}$$

Unter der Determinante von **A**, also |**A**| oder det **A**, versteht man nun die Summe aller Produkte der verschiedenen Permutationen

$$\left|\mathbf{A}\right| = \sum_{\rho} \varepsilon_{j_1\, j_2 \,\ldots\, j_n} \cdot a_{1\, j_1} \cdot a_{2\, j_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\, j_n} \qquad (4-6)$$

mit $\rho = n!$ Permutationen von $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

Regeln und Definitionen

– Vertauschungssatz

Beim Vertauschen zweier Zeilen (Spalten) wechselt die Determinante das Vorzeichen.

– Faktorregel

Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (Spalte) einer Determinante mit einer reellen Konstanten c multipliziert, wird die Determinante mit c multipliziert.

Besitzen umgekehrt die Elemente einer Zeile (Spalte) einer Determinante einen gemeinsamen Faktor, so kann dieser vor die Determinante gezogen werden.

– Linearkombinationsregel

Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man ein beliebiges Vielfaches einer Zeile (Spalte) elementweise zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert bzw. elementweise von einer anderen Zeile (Spalte) subtrahiert.

– Determinante einer Dreiecksmatrix

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Hauptdiagonalelemente:

$$\det \mathbf{A} = \prod_i a_{ii} \qquad (4-7)$$

Diese Eigenschaft macht man sich zu Nutze, um die Determinanten großer Matrizen zu berechnen; dazu wird vorab die jeweilige Matrix auf Dreiecksform umgeformt.

– Determinantenwert null

Eine n-reihige Determinante ist dann und nur dann null, wenn sie eine oder mehrere der folgenden Bedingungen erfüllt:

- Alle Elemente einer Zeile (Spalte) sind null.
  Denn dann tritt in jedem Produkt (4 – 6) der Faktor Null auf.

- Zwei Zeilen (Spalten) stimmen überein.

In diesem Fall überführt die Vertauschung zweier Zeilen (Spalten) $\det \mathbf{A}$ in $-\det \mathbf{A}$, so dass $\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A} = 0$ folgt.

- Zwei Zeilen (Spalten) sind zueinander proportional.
  Ist der Proportionalitätsfaktor c, so kann das c-fache einer Zeile (Spalte) von einer anderen abgezogen werden. Da sich der Wert der Determinanten dabei nicht ändert und sich eine Zeile (Spalte) mit lauter Nullen ergibt, ist die Determinante gleich null.

- Eine Zeile (Spalte) ist als Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) darstellbar.
  Dann kann die Linearkombination der übrigen Zeilen (Spalten) von dieser Zeile (Spalte) subtrahiert werden. Daraus ergibt sich eine Zeile (Spalte) mit lauter Nullen.

– Reguläre / singuläre Matrix

Man spricht von einer regulären $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist, ansonsten heißt sie singulär.

– Rang einer Matrix

Die maximale Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (Spalten) einer Matrix bezeichnet man als Rang der Matrix. Man schreibt $r = \operatorname{rg} \mathbf{A}$, wenn r den Rang von $\mathbf{A}$ bedeutet. Es gilt $\operatorname{rg} \mathbf{A} = n$, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist.

5. Inverse Matrix

Definition und Regeln

Existiert zu einer ($n \times n$)-Matrix **A**, eine ($n \times n$)-Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ derart, dass $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ gilt, so ist $\mathbf{A}^{-1}$ die inverse Matrix zu **A**. Die Matrix **A** heißt dann regulär.

Es gilt:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A}^{T})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{T}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \ldots)^{-1} = \ldots \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Matrixinversion mittels Zeilentransformationen

Wenn in einer Matrix **A** und ebenso in der Einheitsmatrix **I** dieselben elementaren Zeilentransformationen durchgeführt werden, so dass **A** in die Einheitsmatrix **I** überführt wird, so wird dadurch gleichzeitig die Einheitsmatrix **I** in die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ überführt.

Anwendbare Zeilentransformationen sind:

a) Multiplikation eines jeden Elementes einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Skalar.

b) Addition (oder: Subtraktion) jedes Elementes einer Zeile zu (von) dem entsprechenden Element einer anderen Zeile.

c) Kombinationen von a) und b).

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \quad\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{I} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (5-1)$$

Mit den folgenden drei Zeilentransformationen werden **A** und **I** in $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$ überführt:

– Das Element a_{11} von $\mathbf{A}_1$ soll eins werden. Daher wird die erste Zeile von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{I}$ mit $1/a_{11}$ aus $\mathbf{A}$ (hier: $1/4$) multipliziert. Dies ergibt

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \end{array} \qquad (5-2)$$

und ist die erste Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$, vgl. (5 – 3).

– Das Element a_{21} von $\mathbf{A}_1$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 2) mit a_{21} aus $\mathbf{A}$ (hier: 3) multipliziert und von der zweiten Zeile von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{I}$ subtrahiert. Dies ergibt die zweite Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$, vgl. (5 – 3).

– Das Element a_{31} von $\mathbf{A}_1$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 2) mit a_{31} aus $\mathbf{A}$ (hier: 2) multipliziert und von der dritten Zeile von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{I}$ subtrahiert. Dies ergibt die dritte Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$, vgl. (5 – 3).

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}_1 \qquad\qquad\qquad \mathbf{I}_1 \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 7/4 & -1/2 & -3/4 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & 3 & -1/2 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (5-3)$$

Merke: Die erste Spalte von $\mathbf{A}_1$ entspricht nun der ersten Spalte einer (3×3)-Einheitsmatrix. Bei Matrizen mit mehr als drei Zeilen ist mit allen weiteren Zeilen entsprechend zu verfahren.

Nun werden drei weitere Zeilentransformationen auf die Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$ angewendet, so dass $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$ erhalten werden:

– Das Element a_{22} von $\mathbf{A}_2$ soll eins werden. Daher wird die zweite Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$ mit $1/a_{22}$ aus $\mathbf{A}_1$ (hier: $4/7$) multipliziert. Dies ergibt

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -2/7 & -3/7 & 4/7 & 0 \end{array} \qquad (5-4)$$

und ist die zweite Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$, vgl. (5 – 5).

– Das Element a_{12} von $\mathbf{A}_2$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 4) mit a_{12} aus $\mathbf{A}_1$ (hier: $3/4$) multipliziert und von der ersten Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$ subtrahiert. Dies ergibt die erste Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$, vgl. (5 – 5).

– Das Element a_{32} von $\mathbf{A}_2$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 4) mit a_{32} aus $\mathbf{A}_1$ (hier: $3/2$) multipliziert und von der dritten Zeile von $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{I}_1$ subtrahiert. Dies ergibt die dritte Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$, vgl. (5 – 5).

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \mathbf{A}_2 & \mathbf{I}_2 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 5/7 & 4/7 & -3/7 & 0 \\
0 & 1 & -2/7 & -3/7 & 4/7 & 0 \\
0 & 0 & 24/7 & 1/7 & -6/7 & 1
\end{array}\right]
\end{array} \tag{5 – 5}$$

Merke: Nun stimmt auch die zweite Spalte von $\mathbf{A}_2$ mit einer (3×3)-Einheitsmatrix überein.

Abschließend überführen drei weitere Zeilentransformationen $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$ in $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{I}_3$:

- Das Element a_{33} von $\mathbf{A}_3$ soll eins werden. Daher wird die dritte Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$ mit $1/a_{33}$ aus $\mathbf{A}_2$ (hier: $7/24$) multipliziert. Dies ergibt

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1/24 & -1/4 & 7/24 \end{array} \tag{5 – 6}$$

  und ist die dritte Zeile von $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{I}_3$, vgl. (5 – 7).

- Das Element a_{13} von $\mathbf{A}_3$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 6) mit a_{13} aus $\mathbf{A}_2$ (hier: $5/7$) multipliziert und von der ersten Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$ subtrahiert. Dies ergibt die erste Zeile von $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{I}_3$, vgl. (5 – 7).

- Das Element a_{23} von $\mathbf{A}_3$ soll null werden. Dazu wird die Zeile (5 – 6) mit a_{23} aus $\mathbf{A}_2$ (hier: $-2/7$) multipliziert und von der zweiten Zeile von $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{I}_2$ subtrahiert. Dies ergibt die zweite Zeile von $\mathbf{A}_3$ und $\mathbf{I}_3$, vgl. (5 – 7).

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \mathbf{A}_3 & \mathbf{I}_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 13/24 & -1/4 & -5/24 \\
0 & 1 & 0 & -5/12 & 1/2 & 1/12 \\
0 & 0 & 1 & 1/24 & -1/4 & 7/24
\end{array}\right]
\end{array} \tag{5 – 7}$$

Merke: Mit diesen neun Zeilentransformationen wurden die Ausgangsmatrix $\mathbf{A}$ in die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ und die Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ in die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ überführt.

5.1 Fortran-Programm

```
C     *******************************************************
C     MATRIX-INVERSION MITTELS ZEILEN-TRANSFORMATIONEN
C
C     LITERATUR:
C     WOLF, P. R.: ADJUSTMENT COMPUTATIONS, PENNSYLVANIA STATE
C                  UNIVERSITY 1995
C     *******************************************************

      ...
      ...
      ...

      INPUT:  MATRIX-DIMENSION n

      INPUT:  MATRIX (A(i,j),j=1,n); i=1,...,n

      ...
      ...
      ...

C     BEGINN MATRIX-INVERSION
      do 1 k=1,n
         do 2 j=1,n
            if (j.ne.k) then
               A(k,j)= A(k,j) / A(k,k)
            end if
    2    continue
         A(k,k)= 1.0 / A(k,k)
         do 3 i=1,n
            if (i.eq.k) then
               go to 3
            end if
            do 4 j=1,n
               if (j.ne.k) then
                  A(i,j)= A(i,j) - A(i,k) * A(k,j)
               end if
    4       continue
            A(i,k)= -A(i,k) * A(k,k)
    3    continue
    1 continue
C     ENDE MATRIX-INVERSION

      ...
      ...
      ...

      end
```

5.2 Programmbeispiel

Die Inversion der Matrix **A** aus (5 – 1) mit dem vorgenannten Fortran-Programm (vgl. Abschnitt 5.1) führt zu dem folgenden Ergebnis:

```
MATRIX A

|    4.000    3.000    2.000 |
|    3.000    4.000    1.000 |
|    2.000    3.000    4.000 |


  -- I ---    ------ A -----
      1               1
|     .250     .750     .500 |
|    -.750    1.750    -.500 |
|    -.500    1.500    3.000 |


  ------- I -------     - A -
           2              2
|     .571    -.429     .714 |
|    -.429     .571    -.286 |
|     .143    -.857    3.429 |


  ------------ I ----------
                 3
|     .542    -.250    -.208 |
|    -.417     .500     .083 |
|     .042    -.250     .292 |


                -1
INVERSE MATRIX A

|     .542    -.250    -.208 |
|    -.417     .500     .083 |
|     .042    -.250     .292 |
```

Anmerkung: Bei den obigen Zwischenergebnissen sind die Spalten weggelassen, die den Spalten einer Einheitsmatrix entsprechen.

Das in Kapitel 5 beschriebene Rechenverfahren zur Ermittlung der Inversen einer Matrix versagt jedoch, falls im Zuge der Berechnung auf der Hauptdiagonalen eine Null auftritt (unzulässige Division durch null).

In diesem Fall kann eine nicht singuläre Matrix trotzdem invertiert werden, wenn ein Rechenverfahren mit einer **Pivot-Strategie** verwendet wird (vgl. Kapitel 6) – wie dies z.B. auch in den Taschenrechnermodulen geschieht.

6. Lösung eines Gleichungssystems mittels Matrizenrechnung

Gegeben sei ein System linearer Gleichungen bestehend aus *n* Gleichungen mit *n* Unbekannten

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (6-1)$$

mit: **A** der $(n \times n)$-Koeffizientenmatrix,
x dem $(n \times 1)$-Vektor der Unbekannten,
b dem $(n \times 1)$-Vektor der Absolutglieder.

Dann ergibt sich als Lösung der Unbekanntenvektor **x** durch linksseitige Multiplikation von (6 – 1) mit $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \qquad (6-2)$$

Ein besonderer Vorteil der Matrizenalgebra liegt in ihrer Anwendung in Verbindung mit Computern.

6.1 Gauß´scher Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme [1)]

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ geschieht durch Umformung in zwei Teilen:

– Teil 1: **Vorwärtselimination**

Durch elementare Umformungen wird das Gleichungssystem in eine Zeilenstufenform gebracht (rechte obere Dreiecksmatrix).

- Erster Eliminationsschritt:

  Die erste Zeile wird zur Elimination des ersten Koeffizienten a_{i1} $(i > 1)$ der anderen Zeilen benutzt:

  Ist $a_{11} \neq 0$, so subtrahiert man das a_{21}/a_{11}-fache der ersten Zeile von der zweiten Zeile, das a_{31}/a_{11}-fache der ersten Zeile von der dritten Zeile, usw.

  Hinweis: Durch den ersten Eliminationsschritt entstehen in der ersten Spalte der Matrix Nullen, es sind alle $a'_{i1} = 0$ (außer a_{11}) !

- Zweiter Eliminationsschritt:

  Die zweite Zeile wird zur Elimination des zweiten Koeffizienten a_{i2} $(i > 2)$ der anderen Zeilen benutzt:

  Ist $a_{22} \neq 0$, so subtrahiert man das a_{32}/a_{22}-fache der zweiten Zeile von der dritten Zeile, das a_{42}/a_{22}-fache der zweiten Zeile von der vierten Zeile, usw.

Diese Eliminationsschritte werden bis zur *n*-ten Zeile fortgesetzt.

– Teil 2: **Rückwärtseinsetzen**

Aus der Dreiecksform werden die Lösungen x_i durch schrittweises Rückwärtseinsetzen gewonnen.

- Zuerst wird die unterste Zeile nach x_n aufgelöst:

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}} \qquad (6-3)$$

- Die anderen Elemente $x_i,\ i = n-1, \ldots, 1$, des Lösungsvektors **x** bestimmt man dann rekursiv mit der Gleichung:

---

1) Literatur:
Stöcker, H.: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Rechenverfahren, Frankfurt 1993

$$x_i = \frac{b_i'}{a_{ii}'} - \sum_{k=i+1}^{n} x_k \cdot \frac{a_{ik}'}{a_{ii}'} \quad , \quad i = n-1, \ldots, 1 \qquad (6-4)$$

Erläuterung von Fachbegriffen:

– **Pivotisierung**

  Das Gauß-Verfahren versagt, falls das Diagonalelement oder Pivotelement (pivot: englisch, Dreh- und Angelpunkt) a_{kk}' eines Eliminationsschrittes gleich null ist: $a_{kk}' = 0$.

  Ist das Diagonalelement $a_{kk}' = 0$, dann vertauscht man die Pivotzeile k vor Ausführung des k-ten Eliminationsschrittes mit derjenigen Zeile $m > k$, die den betragsmäßig größten Koeffizienten für x_k besitzt (Pivotisierung).

  Die Zeile m wird dann die neue Pivotzeile, das Element a_{mk}' wird das neue Pivotelement.

– **Kondition einer Matrix**

  Wenn im Zuge der Lösung eines linearen Gleichungssystems kleine Änderungen in den Ausgangsdaten große Änderungen in der Lösung hervorrufen, heißt die Lösung instabil; man spricht dann von einem schlecht konditionierten System. Die Kleinheit des Betrages der Determinante reicht als Kennzeichen für eine schlechte Kondition nicht aus.

6.2 Fortran-Programm

```
C     *******************************************************
C     GAUSS-ELIMINATION MIT PIVOTISIERUNG
C
C     LITERATUR:
C     STOECKER, H.: TASCHENBUCH MATHEMATISCHER FORMELN UND
C                   MODERNER RECHENVERFAHREN, FRANKFURT 1993
C     *******************************************************

      ...
      ...
      ...

      INPUT:  MATRIX-DIMENSION n

      INPUT:  MATRIX (A(i,j),j=1,n), VEKTOR b(i)  ;  i=1,...,n

      ...
      ...
      ...

C     BEGINN GAUSS-ELIMINATION

C     BEGINN VORWAERTS-ELIMINATION
      do 1 k=1,n-1
         abzeil= k
         call PIVOT (A,b,n,abzeil)
         do 2 i=k+1,n
            factor= A(i,k) / A(k,k)
            do 3 j=k,n
               A(i,j)= A(i,j) – factor * A(k,j)
    3       continue
            b(i)= b(i) – factor * b(k)
    2    continue
    1 continue
C     ENDE VORWAERTS-ELIMINATION

C     BEGINN RUECKWAERTS-SUBSTITUTION
      x(n)= b(n) / A(n,n)
      do 11 i=n-1,1,-1
         sum= 0.
         do 12 j=i+1,n
            sum= sum + A(i,j) * x(j)
   12    continue
         x(i)= (b(i) - sum) / A(i,i)
   11 continue
C     ENDE RUECKWAERTS-SUBSTITUTION

C     ENDE GAUSS-ELIMINATION

      ...
      ...
      ...

      end
```

```
      subroutine PIVOT (A,b,n,abzeil)

      ...
      ...
      ...

C     BEGINN PIVOTISIERUNG AB ZEILE K
      k= abzeil
      pivo= k
      maxa= abs(A(k,k))
      do 21 i=k+1,n
         dummy= abs(A(i,k))
         if (dummy.gt.maxa) then
            maxa= dummy
            pivo= i
         end if
   21 continue
      if (pivo.ne.k) then
C        VERTAUSCHUNG DURCHFUEHREN
         do 22 j=k,n
            dummy= A(pivo,j)
            A(pivo,j)= A(k,j)
            A(k,j)= dummy
   22    continue
         dummy= b(pivo)
         b(pivo)= b(k)
         b(k)= dummy
      end if
C     ENDE PIVOTISIERUNG

      ...
      ...
      ...

      end
```

6.3 Programmbeispiel

Die Lösung eines Gleichungssystems bestehend aus vier Gleichungen mit vier Unbekannten mit dem vorgenannten Fortran-Programm (vgl. Abschnitt 6.2) führt zu dem folgenden Berechnungsprotokoll:

```
Matrix A:                                 Vektor b:
|    2.0   -1.0   -1.0    1.0 |           |   -1.0 |
|   -1.0    2.0   -1.0    1.0 |           |    1.0 |
|   -1.0   -1.0    2.0    1.0 |           |    0.0 |
|    1.0    1.0    1.0    0.0 |           |    0.0 |

Pivotisierung / Vertauschung ab Zeile:  1 ?
Keine Vertauschung !


Eliminationsschritt 1:

i=2, k=1;   a  =-1.0, a  = 2.0, a  /a  =-0.5 :
             ik        kk        ik  kk

  |   -1.0    2.0   -1.0    1.0    1.0
- |   -1.0    0.5    0.5   -0.5    0.5
= |    0.0    1.5   -1.5    1.5    0.5


i=3, k=1;   a  =-1.0, a  = 2.0, a  /a  =-0.5 :
             ik        kk        ik  kk

  |   -1.0   -1.0    2.0    1.0    0.0
- |   -1.0    0.5    0.5   -0.5    0.5
= |    0.0   -1.5    1.5    1.5   -0.5


i=4, k=1;   a  = 1.0, a  = 2.0, a  /a  = 0.5 :
             ik        kk        ik  kk

  |    1.0    1.0    1.0    0.0    0.0
- |    1.0   -0.5   -0.5    0.5   -0.5
= |    0.0    1.5    1.5   -0.5    0.5


Matrix A:                                 Vektor b:
|    2.0   -1.0   -1.0    1.0 |           |   -1.0 |
|    0.0    1.5   -1.5    1.5 |           |    0.5 |
|    0.0   -1.5    1.5    1.5 |           |   -0.5 |
|    0.0    1.5    1.5   -0.5 |           |    0.5 |

Pivotisierung / Vertauschung ab Zeile:  2 ?
Keine Vertauschung !


Eliminationsschritt 2:

i=3, k=2;   a  =-1.5, a  = 1.5, a  /a  =-1.0 :
             ik        kk        ik  kk
```

```
  |    0.0   -1.5    1.5    1.5   -0.5
- |    0.0   -1.5    1.5   -1.5   -0.5
= |    0.0    0.0    0.0    3.0    0.0


i=4, k=2;   a  = 1.5, a  = 1.5, a  /a  = 1.0 :
             ik        kk        ik  kk

  |    0.0    1.5    1.5   -0.5    0.5
- |    0.0    1.5   -1.5    1.5    0.5
= |    0.0    0.0    3.0   -2.0    0.0
```

```
Matrix A:                                  Vektor b:
|    2.0   -1.0   -1.0    1.0 |        |   -1.0 |
|    0.0    1.5   -1.5    1.5 |        |    0.5 |
|    0.0    0.0    0.0    3.0 |        |    0.0 |
|    0.0    0.0    3.0   -2.0 |        |    0.0 |

Pivotisierung / Vertauschung ab Zeile:  3 ?
Vertauschung !

Nach Vertauschung:
Matrix A:                                  Vektor b:
|    2.0   -1.0   -1.0    1.0 |        |   -1.0 |
|    0.0    1.5   -1.5    1.5 |        |    0.5 |
|    0.0    0.0    3.0   -2.0 |        |    0.0 |
|    0.0    0.0    0.0    3.0 |        |    0.0 |


Eliminationsschritt 3:
```

```
i=4, k=3;   a  = 0.0, a  = 3.0, a  /a  = 0.0 :
             ik        kk        ik  kk

  |    0.0    0.0    0.0    3.0    0.0
- |    0.0    0.0    0.0    0.0    0.0
= |    0.0    0.0    0.0    3.0    0.0
```

```
Matrix A:                                  Vektor b:
|    2.0   -1.0   -1.0    1.0 |        |   -1.0 |
|    0.0    1.5   -1.5    1.5 |        |    0.5 |
|    0.0    0.0    3.0   -2.0 |        |    0.0 |
|    0.0    0.0    0.0    3.0 |        |    0.0 |


Ergebnis durch Rueckwaertseinsetzen:

x(1) = -0.333
x(2) =  0.333
x(3) =  0.000
x(4) =  0.000
```